(1) $f'(x) = \dfrac{1}{\log x}$ より

$$g'(x) = e^4 f'(e^{2x-4}) \cdot e^{2x-4} \cdot 2 - e^2 f'(e^{2x-2}) \cdot e^{2x-2} \cdot 2$$

$$= \frac{e^{2x}}{x-2} - \frac{e^{2x}}{x-1} = \frac{e^{2x}}{(x-1)(x-2)}$$

(2)

$$\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt = \int_2^x \frac{(t)'}{\log t}\,dt = \left[\frac{t}{\log t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{1}{(\log t)^2}\,dt$$

$$= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{1}{(\log t)^2}\,dt$$

(3) まず(2)と同様にして,

$$\int_2^x \frac{1}{(\log t)^{n+1}}\,dt = \int_2^x \frac{(t)'}{(\log t)^{n+1}}\,dt = \left[\frac{t}{(\log t)^{n+1}}\right]_2^x + (n+1)\int_2^x \frac{1}{(\log t)^{n+2}}\,dt$$

$$= \frac{x}{(\log x)^{n+1}} - \frac{2}{(\log 2)^{n+1}} + (n+1)\int_2^x \frac{1}{(\log t)^{n+2}}\,dt \quad \cdots ①$$

数学的帰納法により題意の式を示す.

(i) $n=1$ のとき,(2)より成り立つ.

(ii) $n=i$ のとき,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{i} \frac{(k-1)!\,x}{(\log x)^k} + i!\int_2^x \frac{1}{(\log t)^{i+1}}\,dt - 2\sum_{k=1}^{i} \frac{(k-1)!}{(\log 2)^k}$$

が成り立つとすると,①より

$$f(x) = \sum_{k=1}^{i} \frac{(k-1)!\,x}{(\log x)^k} + \frac{i!\,x}{(\log x)^{i+1}} - \frac{2\cdot i!}{(\log 2)^{i+1}} + (i+1)!\int_2^x \frac{1}{(\log t)^{i+2}}\,dt - 2\sum_{k=1}^{i} \frac{(k-1)!}{(\log 2)^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{(k-1)!\,x}{(\log x)^k} + (i+1)!\int_2^x \frac{1}{(\log t)^{i+2}}\,dt - 2\sum_{k=1}^{i+1} \frac{(k-1)!}{(\log 2)^k}$$

となり $n=i+1$ においても成り立つ.

(i)(ii)より題意は示せた.