

(1) 補題1より $m^2, n^2, m^2+n^2 \in 4$ で割った余りを表にして.

m^2	n^2	m^2+n^2
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	2

したがって $a \in \mathcal{S} \Rightarrow a \in 4$ で割った余りは 0, 1, 2 のいずれか. \square

(補題1) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \equiv 0, 1 \pmod{4}$

任意の自然数 x に対し、4で割った余りと $x^2 \in 4$ で割った余りを右のようにまとめる.

x	x^2
0	0
1	1
2	0
3	1

したがって $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \equiv 0, 1 \pmod{4}$ \square

(2) $a \in \mathcal{S}, b \in \mathcal{S}$ より $a = m_1^2 + n_1^2, b = m_2^2 + n_2^2$ (文字は全て整数) とおける.

$$\begin{aligned} ab &= (m_1 m_2)^2 + (m_1 n_2)^2 + (n_1 m_2)^2 + (n_1 n_2)^2 \\ &= (m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - n_1 m_2)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore a \in \mathcal{S} \text{ かつ } b \in \mathcal{S} \Rightarrow ab \in \mathcal{S} \quad \square$$

(3) 2019 が3桁に書ける \wedge $7 < 11 < 13 < 17 < 19 < 23 < 29 < 31 < 37 < 41 < 47 < 53 < 59 < 67 < 71 < 79 < 83 < 89 < 97 < 101 < 103 < 107 < 113 < 127 < 137 < 149 < 151 < 157 < 163 < 167 < 173 < 179 < 181 < 187 < 191 < 193 < 197 < 199$

$$2019 = 3 \times 673 \equiv 3 \pmod{4} \text{ より (1) より } 2019 \notin \mathcal{S}$$

$$2020 = 4 \times 5 \times 101 = (2^2 + 0^2) \cdot (2^2 + 1^2) \cdot (10^2 + 1^2)$$

(2) を繰り返して用いて.

$$(2^2 + 0^2) \cdot (2^2 + 1^2) \in \mathcal{S}$$

$$(2^2 + 0^2) \cdot (2^2 + 1^2) \cdot (10^2 + 1^2) \in \mathcal{S}$$

$\therefore 2020$ が \mathcal{S} に属する最小の自然数.