(1) 補題1より m^2, n^2, m^2+n^2 を4で割った余りを表にして.

m^2	n^2	m^2+n^2
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	2

したがって $a \in S \Rightarrow$ aを4で割った余りは 0, 1, 2 のいずれか. ■

(補題1) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \equiv 0, 1 \pmod 4$

任意の自然数 x に対し, 4で割った余りと x^2を4で割った余りを右のようにまとめる.

x	x^2
0	0
1	1
2	0
3	1

したがって $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0, 1 \pmod 4$ ■

(2) $a \in S, b \in S$ より $a = m_1^2 + n_1^2$, $b = m_2^2 + n_2^2$ (文字は全て整数) とおける.

$$ab = (m_1m_2)^2 + (m_1n_2)^2 + (n_1m_2)^2 + (n_1n_2)^2$$

$$= (m_1m_2 + n_1n_2)^2 + (m_1n_2 - n_1m_2)^2$$

$\therefore$ $a \in S$ かつ $b \in S \Rightarrow ab \in S$ ■

(3) 2019から順に調べていく.

$2019 = 3 \times 673 \equiv 3 \pmod 4$ より (1) より $2019 \notin S$

$2020 = 4 \times 5 \times 101 = (2^2+0^2) \cdot (2^2+1^2) \cdot (10^2+1^2)$

(2)を繰り返し用いて,

$(2^2+0^2) \cdot (2^2+1^2) \in S$

$(2^2+0^2) \cdot (2^2+1^2) \cdot (10^2+1^2) \in S$.

$\therefore$ 2020 が Sに属する最小の自然数.