大阪公立大学　前期理系　サンプル問題

④ 座標平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を C_t，C_t で囲まれた領域を D_t とする．$0 \leqq t \leqq 2$ に対し，D_0 と D_t の共通面積を $S(t)$ とする．$0<t<2$ に対し，C_0 と C_t の交点のうち y 座標が正の方を P_t とする．座標平面の原点を O として，半直線 OP_t と x 軸の正の向きのなす角を θ で表す．次の問いに答えよ．

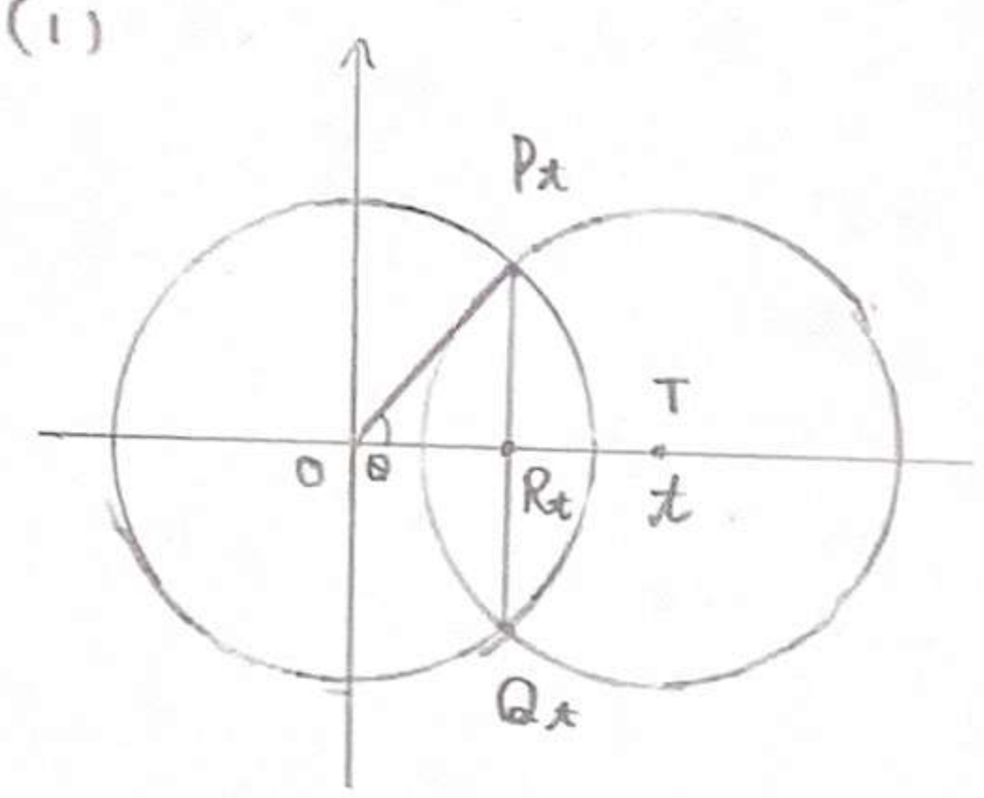
(1) $0<t<2$ のとき，$S(t)$ の値を θ を用いて表せ．

(2) $0<t<2$ のとき，t を θ を用いて表せ．

(3) $\int_0^2 S(t)\,dt$ の値を求めよ．

---

(1)



y 座標が負の方を Q_t とする．

$0<t<2$ より，図形の配置は左図のようになるので，

$$S(t) = 2\{(\text{扇形}\ OP_tQ_t) - \triangle OP_tQ_t\}$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\theta \cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta\right)$$
$$= \underline{2\theta - \sin 2\theta}$$

(2) $T(t, 0)$ とし，直線 P_tQ_t と x 軸の交点を R_t とすると，

$\triangle P_tOT$ は $OR_t = R_tT = 1$ の二等辺三角形なので，$\underline{t = 2\cos\theta}$

(3)
$$\int_0^2 S(t)\,dt = \int_0^2 2\theta - \sin 2\theta \ dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2\theta - \sin 2\theta)(-2\sin\theta)\,d\theta$$

$$\frac{dt}{d\theta} = -2\sin\theta$$

t	$0 \to 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta\sin\theta - \sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin\theta\,d\theta = \left[-\theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$ より，

$$\int_0^2 S(t)\,dt = 4\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{8}{3}}$$