大阪公立大学　前期理系 サンプル問題.

3　0でない複素数 z に対し、

$$w = z + \frac{1}{z}$$

とおく. i を虚数単位とし、z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする. また w の実部を u, 虚部を v とする. 次の向いに答えよ.

(1) u と v をそれぞれ r と θ を用いて表せ.

(2) 点 z が条件 $|z+1| = |z-i|$ $(0<\theta<\pi)$ を満たして複素数平面上を動くとき、u と v が満たす関係式を求め、点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ.

---

(1)

$$z + \frac{1}{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

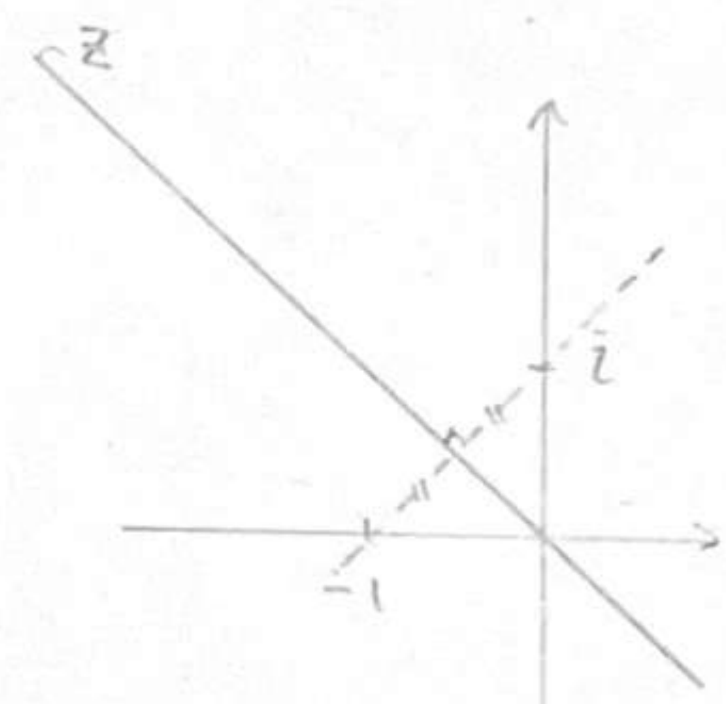
$$= \cos\theta\left(r + \frac{1}{r}\right) + i\sin\theta\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

$$\therefore \quad u = \cos\theta\left(r+\frac{1}{r}\right), \quad v = \sin\theta\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

(2) $|z+1| = |z-i|$ が表す z の集合は右図のように点 -1 と点 i の垂直二等分線であるので、

$$z = r\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$(\because 0<\theta<\pi)$$



よって (1) より

$$u = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

ここで

$$u + v = -\frac{2}{\sqrt{2}r} = -\sqrt{2}\frac{1}{r}$$

$$u - v = -\frac{2}{\sqrt{2}}r = -\sqrt{2}r$$

$$\therefore \quad \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \quad (u<0)$$

よって w が表す図形は以下の通り