xyz 空間において, 条件

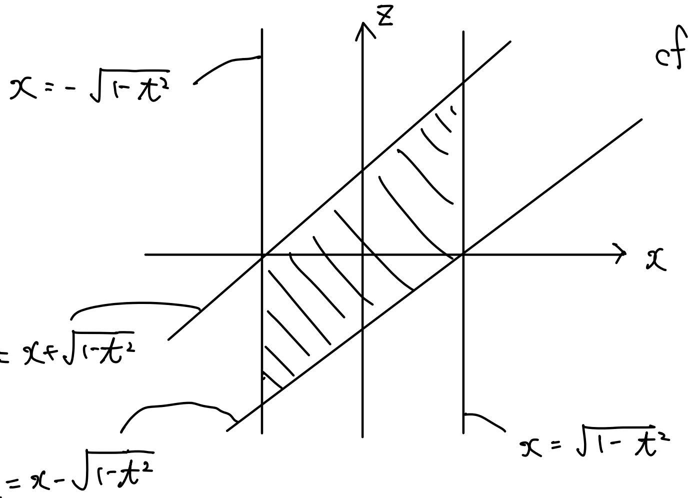
$$x^2+y^2 \leq 1,\ \ (x-z)^2+y^2 \leq 1$$

を満たす点 $P(x,y,z)$ の全体からなる立体 K を考える.この立体の体積 V を求めよ.

$y=t$ と固定すると、t の存在条件は $x^2 \leqq 1-t^2$, $(x-z)^2 \leqq 1-t^2$

より $0 \leqq 1-t^2$ すなわち、$-1 \leqq t \leqq 1$.

ここで 立体Kを $y=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ると、その断面は以下の通り



cf) $x^2 \leqq 1-t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2}$

$(x-z)^2 \leqq 1-t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{1-t^2} \leqq x-z \leqq \sqrt{1-t^2}$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{1-t^2} \leqq z \leqq x+\sqrt{1-t^2}$

断面積を $S(t)$ とすると $S(t) = 2\sqrt{1-t^2} \cdot 2\sqrt{1-t^2} = 4(1-t^2)$

$$\therefore\ V = \int_{-1}^{1} S(t)\,dt = 8\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 8\left(1-\frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{16}{3}}$$

(偶関数)