大阪公立大学　前期理系　サンプル問題

1　自然数 n に対し、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

とおくとき、次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して，$S_{2n} = T_n$ が成り立つことを示せ．

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$ を求めよ．

---

(1) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$，$T_1 = \frac{1}{2}$ となり成り立つ．

(ii) $n=i$ のとき，$S_{2i} = T_i$ を仮定すると，

$$S_{2i+2} = S_{2i} + \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+2}$$ であり，

$$T_{i+1} = T_i + \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2i+2}\right) - \frac{1}{i+1} = T_i + \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+2}$$

仮定より $S_{2i+2} - T_{i+1} = 0$

$\therefore$ $S_{2i+2} = T_{i+1}$．

(i)(ii) より全ての自然数 n に対し，$S_{2n} = T_n$ ■

(2)

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \log 2$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} T_n + \frac{1}{2n} = \log 2 \quad \left(\because \lim_{n\to\infty} T_n = \log 2,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0\right)$$