解)

三角形 ABC の外接円を R とする.

(1)sin$A$=$\frac{a}{2R}$, sin$C$=$\frac{c}{2R}$, cos$B$=$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

よって,

$$\begin{aligned}\sin A &= 2\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{c}{2R}\\ a^2c &= c(c^2+a^2-b^2)\\ c^3 &= b^2c\\ b &= c \quad (\because 0<b,c)\end{aligned}$$

したがってこの等式を満たすのは $b=c$ の二等辺三角形.

＜別解＞

和積公式より, sin$(B+C)$-sin$(B-C)$=2cos$B$sin$C$

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(B+C)-\sin(B-C)\\ &= \sin(\pi-A)-\sin(B-C) \quad (\because A+B+C=\pi)\\ &= \sin A-\sin(B-C)\\ 0 &= \sin(B-C)\end{aligned}$$

$-\pi<B-C<\pi$ より, これを満たすのは $B=C$ のみ.

よってこの等式を満たすのは $B=C$ の二等辺三角形.

(2)$\sin A=\frac{a}{2R}$ $\sin B=\frac{b}{2R}$ $\sin C=\frac{c}{2R}$ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{c}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) &= \frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}\\ a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2) &= 2ab(a+b)\\ a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b) &= 0\\ a^2+b^2 &= c^2 \quad (\because a+b>0)\end{aligned}$$

したがってこの等式を満たすのは $C=\frac{\pi}{2}$ の直角三角形.