解)

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする.

条件 (ア) より, $f(x)+f(-x)=0$ であるから,

$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= (x^3+ax^2+bx+c)+(-x^3+ax^2-bx+c) \\ &= 2ax^2+2c \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore a=c=0$

条件 (イ) より, $y=2$ との接点を t とすると,

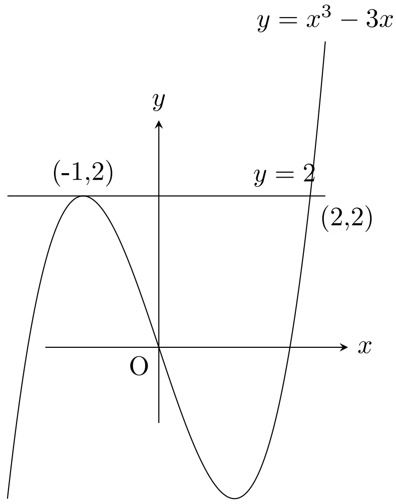
$$\begin{cases} f'(t)=0 \\ f(t)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t^2+b=0 \\ t^3+bt=2 \end{cases}$$

$\therefore t=-1, b=-3$

(2) (1) より $f(x)=x^3-3x$ となるので,

$f(x)-2=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$ であるから, グラフは下図の通り.



よって求める面積は,

$$\begin{aligned} -\int_{-1}^{2}\{f(x)-2\}\,dx &= -\int_{-1}^{2}\{(x+1)^2(x-2)\}\,dx \\ &= -\int_{-1}^{2}\{(x+1)^3-3(x+1)\}\,dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}(x+1)^4-(x+1)^3\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$