1 $C: y=x^2$, $a \in \mathbb{R}$

(1) 接点 $T(t, t^2)$ とすると. $y'=2x$ より

接線は $y-t^2=2t(x-t)$

$=2tx-2t^2$

$y=2tx-t^2$

これが A を通るので,

$-1=2at-t^2$

$t^2-2at-1=0$ …①

丁度2本 $\Leftrightarrow$ (判別式) >0

$\Leftrightarrow$ $a^2+1>0$ …(※)

(※)は成り立つ。 (証明終)

(2) (1)の過程より

①を満たす2解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると.

$P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ となり.

PQの方程式は $y-\alpha^2=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$

$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

ここで解と係数の関係 $\begin{cases}\alpha+\beta=2a\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$ より

$y=2ax+1$ (証明終)

(3) $y=2ax+1 \Leftrightarrow y-2ax-1=0$

$L=\dfrac{|-2a^2-2|}{\sqrt{1+4a^2}}=\dfrac{2(a^2+1)}{\sqrt{1+4a^2}} \Leftrightarrow \dfrac{L^2}{4}=\dfrac{a^4+2a^2+1}{4a^2+1}=\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{7}{16}+\dfrac{\frac{9}{16}}{4a^2+1}$

$\Leftrightarrow 4L^2=4a^2+1+\dfrac{9}{4a^2+1}+6$

$4a^2+1>0$ より $4L^2-6=4a^2+1+\dfrac{9}{4a^2+1} \geqq 2\sqrt{9}=6$

($4a^2+1=\dfrac{9}{4a^2+1}$ つまり $a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ のとき等号成立)

よって min $\{L\}=\sqrt{3}$ $(a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}})$ //

2

$0 < s < 1$, $0 < t < 1$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると.

$\overrightarrow{OA_0} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_0} = \frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + s\vec{c}$, $\overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$

(1) A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあることより,

実数 p, q を用いて

$\overrightarrow{AQ} = = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AP}$

$-\frac{1}{2}\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c} = p\left(\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + q\left\{\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{a} + s\vec{c}\right\}$

OABCは同一平面上にないので $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立.

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}p + q\left(\frac{1}{2}-s\right) \\ 1-t = \frac{1}{3}p \\ t = sq \end{cases} \quad \therefore 2s = ts + t \quad \therefore t = \frac{2s}{1+s} \ (\because s \neq -1)$$

(2) $\angle AOB = 120°$ より $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120° = -1 \cdots ①$

$\angle BOC = 90°$ より $\vec{b}\cdot\vec{c} = 0 \cdots ②$

$\angle COA = 60°$ より $\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos 60° = 1 \cdots ③$

$\angle POQ = 90°$ より $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = (1-s)(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t(1-s)\vec{a}\cdot\vec{c} + s(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c} + st|\vec{c}|^2$

$= -(1-s)(1-t) + t(1-s) + 4st$

よって $-(1-s)(1-t) + t(1-s) + 4st = 0$

$-1 + t + s - st + t - st + 4st = 0$

$2st + s + 2t - 1 = 0$

(1) より $ts = 2s - t$ より

$4s + s - 1 = 0$

$5s = 1$

$s = \frac{1}{5}$

$\boxed{3}$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bx^2\right]_a^c = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2\right]_b^c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}b(c^2 - a^2) - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2}a(c^2 - b^2) - \frac{1}{3}b^3$$

$$\Leftrightarrow 3bc^2 - 3a^2b - 2a^3 = 3ac^2 - 3ab^2 - 2b^3$$

$$\Leftrightarrow 3c^2(b-a) - 3ab(a-b) - 2(a^3 - b^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a-b) + 2(a-b)(a^2+ab+b^2) + 3c^2(a-b) = 0$$

(1) $a \neq b$ より

$$3ab + 2(a^2+ab+b^2) + 3c^2 = 0$$

$$c^2 = -ab - \frac{2}{3}(a^2+ab+b^2) = \underline{-\frac{2}{3}a^2 - \frac{5}{3}ab - \frac{2}{3}b^2}$$

(2) $a \neq b$ より

$$27 = -2a^2 - 5ab - 2b^2 \Leftrightarrow (2a+b)(a+2b) = -27$$

$a < b$ より $2a+b < 0 < a+2b$

また $(2a+b) + (a+2b) = 3(a+b)$ を考慮して

$$(2a+b, a+2b) = (-3, 9), (-9, 3)$$

$\therefore (a, b) = \underline{(-5, 7)\ (-7, 5)}$

(3) $a \neq b$ $\quad c^2 = -\frac{1}{3}(2a+b)(a+2b)$

$-\frac{1}{3}(2a+b)(a+2b) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2a+b$ または $a+2b$ が 3 の倍数

(i) $2a+b$ が 3 の倍数の時. $\quad 2a+b = 3k \quad (k \in \mathbb{Z})$

よって $a+2b = a + 2(3k - 2a) = 6k - 3a = 3(2k - a)$

より $a+2b$ も 3 の倍数となり. $\quad a+2b = 3k' \quad (k' \in \mathbb{Z})$ と表せる。

$\therefore c^2 = -3kk'$ $\quad$ よって $\quad c$ は 3 の倍数

(ii) $a+2b$ が 3 の倍数の時も同様