解)

(1) $f(0), f(1), f(2)$ がいずれも整数であることより

$$\begin{cases} f(0) = c \quad (\text{整数}) \\ f(1) = a + b + c \quad (\text{整数}) \\ f(2) = 4a + 2b + c \quad (\text{整数}) \end{cases}$$

これらを連立して,

$$\begin{aligned} 2a &= f(2) - 2f(1) + f(0) \\ 2b &= -f(2) + 4f(1) - 3f(0) \end{aligned}$$

$f(0), f(1), f(2)$ はそれぞれ整数であるので $2a, 2b$ も整数.

(証明終わり)

(2)

(a)n が偶数の時,$n = 2k$ (k は整数) とすると,

$$\begin{aligned} f(2k) &= 4ak^2 + 2bk + c \\ &= 2a \cdot 2k^2 + 2b \cdot k + c \end{aligned}$$

(1) より, これらはそれぞれ整数であるので $f(2k)$ は整数.

(b)n が奇数の時,$n = 2k + 1$ (k は整数) とすると,

$$\begin{aligned} f(2k+1) &= a(2k+1)^2 + b(2k+1) + c \\ &= 4ak^2 + 2bk + 4bk + a + b + c \\ &= 4ak^2 + 2bk + 4bk + f(0) \end{aligned}$$

(a) と同様の議論より $f(2k+1)$ は整数.

(a),(b) より, すべての整数 n について,$f(n)$ は整数である.

(証明終わり)

(2)(別解)

(1) より,

$$\begin{aligned} f(n) &= an^2 + bn + c \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2an^2 + \frac{1}{2} \cdot 2bn + c \\ &= \frac{1}{2}\{f(2) - 2f(1) + f(0)\}n^2 + \frac{1}{2}\{-f(2) + 4f(1) - 3f(0)\}n + f(0) \\ &= f(2) \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - f(1) \cdot n(n-2) + f(0) \cdot \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

ここで, $n(n-1), (n-1)(n-2)$ は偶数より, $\frac{1}{2}n(n-1)$ 及び $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ は整数.

よって $f(n)$ が整数となり, 題意は示せた.